© Andrzej Budkowski, Inst. Fizyki UJ, Kraków XII 2010

ZADANIA do kursu PODST. FIZ. MAT. SKOND. 1 (ZMiN)/
ZESTAW 4

ZAD.1. Wykazać że dla długich fal równanie ruchu sieci jednoatomowej: $M\dfrac{d^2u_s}{dt^2}=\sum_p C_p(u_{s+p}-u_s)$ przechodzi w równanie fali sprężystej rozchodzącej się w ośrodku ciągłym: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, gdzie v- jest prędkością dźwięku.

ZAD.2. A) Metodę periodycznych warunków brzegowych zastosuj do drgań zbioru N atomów w sześcianie o boku L. Pokaż, że gęstość stanów w przestrzeni pędów $w(\vec{k})=\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^3$.

Oblicz gęstość stanów w przestrzeni częstości D(ω) stosując następujące rozumowanie:

i) liczbę drgań normalnych w przedziale (ω,ω +dω) można wyrazić na dwa równoważne sposoby:
$$D(\omega)d\omega=\int\limits_{warstwa\ (\omega,\omega+d\omega)} w(\vec{k})d^3k$$

ii) w przestrzeni pędów warstwa (ω,ω +dω) odnosi się do naskórka o grubości $dk_\perp$ utworzonego dla powierzchni o stałej częstości S_ω a więc: $\int\limits_{warstwa\ (\omega,\omega+d\omega)} d^3k = \int\limits_{\omega=const} dS_\omega dk_\perp$

iii) grubość naskórka można wyrazić przez prędkość grupową v_g: $dk_\perp=\dfrac{d\omega}{\nabla_{\vec{k}}\omega}=\dfrac{d\omega}{v_g}$

Powinieneś uzyskać wynik: $D(\omega)=\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^3\int\limits_{\omega=const}\dfrac{dS_\omega}{v_g}$.

B) W **przybliżeniu Debye'a** relacja dyspersji wynosi: ω(k) = vk a więc powierzchnia stałej częstości S_ω jest kulą! Zakładając, że dla 3-dim kryształu mamy możliwe 3 polaryzacje drgań normalnych pokaż, że całkowita gęstość stanów wynosi: $D(\omega)=3\dfrac{L^3}{2\pi^2}\dfrac{\omega^2}{v^3}$.

ZAD.3. a) Znajdź dozwolone wartości wektora falowego q dla drgań 1-wymiarowej sieci jednoatomowej o stałej sieci A i długości L, zakładając linową relację dyspersji $\omega = |q|\, v_f$ oraz warunki brzegowe na wychylenie u(n) n-tego atomu z położenia równowagi:
i) u(n) = u(n+L/A) ALBO **ii)** u(0) = u(L/A) = 0
b) Oblicz funkcję gęstości stanów D(ω)
c) Uogólnij wyniki z punktu a) na przypadek 2- i 3-wymiarowy. Pokaż, że oba warunki brzegowe i) oraz ii) prowadzą do tego samego wyniku: $D(\omega) = const\ L^d\ \omega^{(d-1)}/v_f^d$ (dając także te same stałe const)

ZAD.4. A) Model Einsteina Oblicz $c_V(T)$ przyjmując $D(\omega)=3N\delta(\omega-\omega_E)$, gdzie N- liczba atomów w krysztale. Dla $T\to\infty$ pokaż, że $c_V(T)$ spełnia prawo Dulonga-Petita.

B) Model Debye'a Pokaż, że dla N atomów w sześcianie o boku L, gęstość stanów w przestrzeni pędów $w(k) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$. Używając zależności dyspersyjnej $\omega = vk$ pokaż, że $D(\omega) = \frac{3\omega^2 L^3}{2\pi^2 v^3}$ dla $\omega < \omega_D = (6\pi^2 N)^{\frac{1}{3}} \frac{V}{L}$. Oblicz $c_V(T)$ i pokaż, że dla $T \to 0$ $c_V(T) \propto T^3$.

ZAD.5. Rozszerzalność cieplna kryształu jako efekt anharmoniczny. Załóż, że w 1-dim krysztale energia potencjalna atomu wychylonego z pozycji równowagi o u jest opisana wzorem $E(u) = E_0 + \frac{B}{2}u^2 + \frac{C}{6}u^3$. Przyjmij, że rozkład kanoniczny (rozkład Boltzmanna) opisuje gęstość prawdopodobieństwa dla atomu o wychyleniu u. Oblicz średnie wychylenie atomu $< u >= \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\beta E(u)}du / \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta E(u)}du$ korzystając z $e^{-\beta[E_0 + \frac{B}{2}u^2 + \frac{C}{6}u^3]} \approx const.e^{-\beta\frac{B}{2}u^2}(1 + \frac{C}{6}u^3)$ oraz ze wzorów $\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-\alpha z^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ oraz $\int_{-\infty}^{\infty} z^4 dz \exp(-\alpha z^2) = \frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Powinieneś otrzymać wynik: $< u >= \frac{C}{2B^2} k_B T$. Oblicz współczynnik rozszerzalności linowej $\lambda := \frac{1}{L_0}(\frac{\partial L}{\partial T})_p$ dla 1-dim kryształu o długości L i stałej sieci a, zbudowanego z N atomów. Załóż, że $L_0 = Na$ oraz $L = N(a + < u >)$.